

(17.10.2024)

Dans cette séance on va voir :

(on va finir l'exemple I et la section §4.7)

- (i) lien entre familles libres/génératrices et les bases
- (ii) construction d'applications linéaires
- (iii) la matrice d'une application linéaire relative à deux bases

extraction
et
complétion

Rappel $\mathcal{F} \subseteq V$ est famille génératrice ($\text{de } V$) $\iff \mathcal{F} \text{ engendre } V \iff \text{Vect } \mathcal{F} = V$

Extraction
d'une base à partir
d'une famille génératrice

(Lemme 5, p. 60)

Si $\mathcal{F} = \{w_1, \dots, w_r\}$ engendre un E.V. V ,
et $w_j \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\}$, alors $\mathcal{F} \setminus \{w_j\}$ engendre V .

En conséquence, si $\mathcal{F}$ engendre, il existe $\mathcal{B}$ base $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.

(Preuve) Soit $v \in V$. On va montrer d'abord que $v \in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{w_j\})$. Pour le faire, on écrit, pour $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ et $\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_{j+1}, \dots, \beta_r \in \mathbb{K}$,

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{j-1} w_{j-1} + \alpha_j w_j + \alpha_{j+1} w_{j+1} + \dots + \alpha_r w_r$$

↑
car $v \in \text{Vect } \mathcal{F}$

et

$$w_j = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{j-1} w_{j-1} + \beta_{j+1} w_{j+1} + \dots + \beta_r w_r$$

↑
car $w_j \in \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\}$

Alors

$$v = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_{j-1} w_{j-1} + \alpha_j (\underbrace{\beta_1 w_1 + \dots + \beta_{j-1} w_{j-1} + \beta_{j+1} w_{j+1} + \dots + \beta_r w_r}_{w_j}) + \alpha_{j+1} w_{j+1} + \dots + \alpha_r w_r$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1 \alpha_j) w_1 + \dots + (\alpha_{j-1} + \beta_{j-1} \alpha_j) w_{j-1} + (\alpha_{j+1} + \beta_{j+1} \alpha_j) w_{j+1} + \dots + (\alpha_r + \beta_r \alpha_j) w_r$$

$\in \text{Vect}(\mathcal{F} \setminus \{w_j\}) = \text{Vect}\{w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_r\}$ ✓

Pour montrer le dernière énoncé, on note que, si on répète la première partie, on va arriver à faire des extractions : $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \setminus \{w_j\} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{B} (\subseteq \mathcal{F})$ avec $\mathcal{B} = \{w_{i_1}, \dots, w_{i_s}\}$ dans laquelle aucun vecteur ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des autres $\implies \mathcal{B}$ est libre (Thm 2.20) et génératrice $\implies \mathcal{B}$ base de V . □

Exemple 4.36 Soit $V = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Méthode d'extraction

Pour des SEV de $\mathbb{R}^n$: Règle d'extraction : choisir les vecteurs qui correspondent aux colonnes contenant des pivots de la FER

① considérer la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ et ②

Dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_1 \leftarrow -L_2}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{4}L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & -7 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 5L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

→ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → colonnes 1 et 2 avec pivots ⇒ $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ base de V .

FER

Complétion d'une base à partir d'une famille libre

(Thm. 4.53)

Soit $\mathcal{F} = \{v_1, \dots, v_p\}$ une famille libre dans un E.V. V de dim. n . Alors $p \leq n$ et il existe $v_{p+1}, \dots, v_n \in V$ tels que $\{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V .

En particulier, une famille libre de V à dim V éléments est une base de V .

(Preuve) Comme $\mathcal{F}$ est libre, le Lemme 10 nous dit que $p \leq n$. Si $\text{Vect } \mathcal{F} = V$, alors $p = n$ et $\mathcal{F}$ est une base, d'après le Corollaire 2. ✓

Si $\text{Vect } \mathcal{F} \neq V$, il existe $v \in V \setminus \text{Vect } \mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F} \cup \{v_{p+1}\} = \{v_1, \dots, v_{p+1}\}$ est libre, par le Thm. 2.20. Si $\text{Vect } \{v_1, \dots, v_{p+1}\} = V$, alors $n = p+1$ et $\{v_1, \dots, v_{p+1}\}$ est base de V . Sinon, on répète cette procédure jusqu'à arriver à $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p, v_{p+1}, \dots, v_n\}$ base de V . □

↳ Pas de "méthode" simple pour compléter une famille libre $\{v_1, \dots, v_p\}$

⚠ Il faut choisir : $v_{p+1} \notin \text{Vect } \{v_1, \dots, v_p\}$, $v_{p+2} \notin \text{Vect } \{v_1, \dots, v_{p+1}\}$, ...

Exemple 4.54 La famille $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ est libre, mais n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$ (pourquoi?). Pour obtenir un $\bar{v}_3$ pour que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ soit

base de $\mathbb{R}^3$, on écrit un vecteur générique de $\text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$:

$$x_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 3x_2 \\ -3x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{v}_3 \text{ pour } x_1 = x_2 = 1$$

Alors

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

$\mathcal{B}$

on peut choisir
ici n'importe quoi
 $\neq -1$
et $\bar{v}_3 \notin \text{Vect}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$

Résultat fondamental
sur les applications
linéaires

Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ une base de V

$\mathcal{C} = \{w_1, \dots, w_p\} \subseteq W$ une famille de W

Alors, il existe une unique application linéaire

$T: V \rightarrow W$ telle que $T(v_i) = w_i, \forall i \in [1, p]$. D'après le Thm 4.46,

T est bijective ssi $\mathcal{C}$ est base de W .

(Preuve) Pour l'existence de T , on définit

$$(*) \quad T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p}_{\text{élément générique}}) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p), \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}.$$

Comme $\mathcal{B}$ est base de V , tout élément $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p$.
donc $(*)$ définit une application $T: V \rightarrow W$. Elle est linéaire, car

$$T(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p}_v + \underbrace{\lambda(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_p v_p)}_{\lambda \cdot w}) = T((\alpha_1 + \lambda\beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_p + \lambda\beta_p)v_p)$$

$$= (\alpha_1 + \lambda\beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_p + \lambda\beta_p)w_p = \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_p w_p)}_{=T(v)} + \lambda \underbrace{(\beta_1 w_1 + \dots + \beta_p w_p)}_{=T(w)} = T(v) + \lambda T(w). \checkmark$$

Pour l'unicité de T , on suppose que $T(v_i) = w_i = T'(v_i)$ avec $T, T': V \rightarrow W$ deux applications linéaires, alors
 $\forall i \in [1, p]$ car T linéaire car T' linéaire

$$T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p) \stackrel{\downarrow}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_p T(v_p) \stackrel{\downarrow}{=} \alpha_1 T'(v_1) + \dots + \alpha_p T'(v_p) \stackrel{\downarrow}{=} T'(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p)$$

ce qui nous dit que $T(v) = T'(v), \forall v \in V = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_p\}$.
(un peu difficile)

Exercice Soit $\bar{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}, \bar{w} = \begin{pmatrix} \pi \\ \sqrt{3} \\ -e \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe une application linéaire bijective $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $T(\bar{v}) = \bar{w}$. $\square$

§ 4.8. Matrice d'une application linéaire

36

Soient

- $T: V \rightarrow W$ une application linéaire
- $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de V
- $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W

Définition 4.55 Étant donné B, B' et $T: V \rightarrow W$ comme ci-dessus, on définit la matrice de T relative aux bases B et B' (ou la représentation matricielle de T relative aux bases B et B') via

$$[T]_{B' \leftarrow B} = \begin{bmatrix} [T(v_1)]_{B'} & \dots & [T(v_m)]_{B'} \end{bmatrix} \in M_{n \times m}(\mathbb{R})$$

[RK, J] Si $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, alors

$$[T]_{B' \leftarrow B} = [T].$$

de $\mathbb{R}^n$ de $\mathbb{R}^m$

Propriété fondamentale de la matrice d'une application linéaire

Pour B, B' et $T: V \rightarrow W$ comme ci-dessus, et $v \in V$ on a

$$[T(v)]_{B'} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B.$$

et c'est la seule matrice qui vérifie cette id.

(Preuve) Pour $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$ on a $T(v) \stackrel{T \text{ lin.}}{=} \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m)$. Or, pour $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ on a

$$T(v_j) = \alpha_{1j} w_1 + \dots + \alpha_{nj} w_n \Rightarrow [T(v_j)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_{B' \leftarrow B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}.$$

Alors, $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \dots + \alpha_m T(v_m) = \alpha_1 (\alpha_{11} w_1 + \dots + \alpha_{n1} w_n) + \dots + \alpha_m (\alpha_{1m} w_1 + \dots + \alpha_{nm} w_n)$

$$= (\alpha_{11} \alpha_1 + \dots + \alpha_{1m} \alpha_m) w_1 + \dots + (\alpha_{n1} \alpha_1 + \dots + \alpha_{nm} \alpha_m) w_n$$

$$\Rightarrow [T(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \alpha_1 + \dots + \alpha_{1m} \alpha_m \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \alpha_1 + \dots + \alpha_{nm} \alpha_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = [T]_{B' \leftarrow B} \cdot [v]_B \quad \square$$

Exemple 4.56* (~ Exercice 6 série 9)

Soit $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$. Calculer $[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}}$ où

$$\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$$

$$\mathcal{B}' = \{1, 1-t, (1-t)^2\}$$

$$p \mapsto p'$$

On calcule

$$\bullet T(1) = 0 \Rightarrow [T(1)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bullet T(t) = 1 \Rightarrow [T(t)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$\bullet T(t^2) = 2t \Rightarrow [T(t^2)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \bullet T(t^3) = 3t^2 \Rightarrow [T(t^3)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot 1 - 2 \cdot (1-t) + 0 \cdot (1-t)^2$$

(*)

$$= 3 \cdot 1 - 6 \cdot (1-t) + 3 \cdot (1-t)^2$$

(*)

Ainsi

$$[T]_{\mathcal{B}' \leftarrow \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Pour chaque (*), il faut calculer les coordonnées, pour la dernière par ex:

$$x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot (1-t) + x_3 \cdot (1-t)^2 = 3t^2 = 0 + 0 \cdot t + 3t^2$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -6 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

(voir Exemple 4.33) $\uparrow$